

# Exámenes de Selectividad

Matemáticas II. Comunidad Valenciana 2019,  
Convocatoria extraordinaria

[mentoor.es](http://mentoor.es)



## Problema A.1. Álgebra

Se da el sistema de ecuaciones 
$$\begin{cases} 2x + 3z = \alpha \\ x - 2y + 2z = 5 \\ 3x - y + 5z = \alpha + 1 \end{cases}$$
 donde  $\alpha$  es un parámetro real.

- Los valores de  $\alpha$  para los que el sistema es compatible y determinado.
- La solución del sistema cuando  $\alpha = -1$ .
- El valor de  $\alpha$  para que el sistema tenga una solución  $(x, y, z)$  que verifique  $x + y + z = 0$ .

**Solución:**

- Los valores de  $\alpha$  para los que el sistema es compatible y determinado.

Un sistema es compatible y determinado si el determinante de la matriz de coeficientes A es distinto de cero.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 2(-10 - (-2)) - 0 + 3(-1 - (-6)) = 2(-8) + 3(5) = -16 + 15 = -1$$

Como el determinante es -1 (constante y no nulo), el sistema es siempre Compatible Determinado para cualquier valor de  $\alpha$ .

**El sistema es Compatible Determinado para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ .**

- La solución del sistema cuando  $\alpha = -1$ .

Como es S.C.D., aplicamos la Regla de Cramer con  $|A| = -1$ .

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 5 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-1(-8) - 0 + 3(-5)}{-1} = \frac{8 - 15}{-1} = 7$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{2(25) - (-1)(-1) + 3(-15)}{-1} = \frac{50 - 1 - 45}{-1} = -4$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{2(5) - 0 + (-1)(5)}{-1} = \frac{10 - 5}{-1} = -5$$

**La solución es  $(x, y, z) = (7, -4, -5)$ .**



c) El valor de  $\alpha$  para que el sistema tenga una solución  $(x, y, z)$  que verifique  $x + y + z = 0$ .

Primero, resolvemos el sistema en función de  $\alpha$  por Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & 0 & 3 \\ 5 & -2 & 2 \\ \alpha + 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}}{-1} = -(-10\alpha + 15 - 2(\alpha + 1)) = 12\alpha - 13$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & \alpha & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & \alpha + 1 & 5 \end{vmatrix}}{-1} = -(2(25 - 2(\alpha + 1)) - \alpha(-1) + 3(\alpha + 1 - 15)) = -(46 - 4\alpha + \alpha + 3\alpha - 42) = -4$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & \alpha \\ 1 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & \alpha + 1 \end{vmatrix}}{-1} = -(2(-2(\alpha + 1) + 5) + \alpha(-1 + 6)) = -(-4\alpha - 4 + 10 + 5\alpha) = -(\alpha + 6)$$

Imponemos la condición  $x + y + z = 0$ :

$$(12\alpha - 13) + (-4) + (-\alpha - 6) = 0 \implies 11\alpha - 23 = 0 \implies \alpha = 23/11$$

$$\boxed{\alpha = 23/11.}$$

## Problema A.2. Geometría

Se da el plano  $\pi : 2x + y + 2z = 8$  y el punto  $P = (10, 0, 10)$ .

- La distancia del punto P al plano  $\pi$ .
- El área del triángulo cuyos vértices son los puntos A, B y C, obtenidos al hallar la intersección del plano  $\pi$  con los ejes de coordenadas.
- El volumen del tetraedro cuyos vértices son P, A, B y C.

Solución:

- La distancia del punto P al plano  $\pi$ .

$$d(P, \pi) = \frac{|2(10) + 0 + 2(10) - 8|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{|20 + 20 - 8|}{\sqrt{9}} = \frac{32}{3}$$

La distancia es 32/3 unidades.

- El área del triángulo cuyos vértices son los puntos A, B y C, obtenidos al hallar la intersección del plano  $\pi$  con los ejes de coordenadas.

Puntos de corte: A(4,0,0), B(0,8,0), C(0,0,4).

Vectores:  $\vec{AB} = (-4, 8, 0)$ ,  $\vec{AC} = (-4, 0, 4)$ .

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 8 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |(32, 16, 32)| \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{32^2 + 16^2 + 32^2} = \frac{1}{2} \sqrt{1024 + 256 + 1024} = \frac{1}{2} \sqrt{2304} = \frac{48}{2} = 24 \end{aligned}$$

El área del triángulo es 24 unidades cuadradas.

- El volumen del tetraedro cuyos vértices son P, A, B y C.

$$V = \frac{1}{6} |\det(\vec{PA}, \vec{PB}, \vec{PC})|$$

$\vec{PA} = (-6, 0, -10)$ ,  $\vec{PB} = (-10, 8, -10)$ ,  $\vec{PC} = (-10, 0, -6)$ .

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -6 & 0 & -10 \\ -10 & 8 & -10 \\ -10 & 0 & -6 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} |-8(-36 - 100)| = \frac{1}{6} |-8(-64)| = \frac{512}{6} = \frac{256}{3}$$

El volumen es 256/3 unidades cúbicas.



### Problema A.3. Análisis

Se da la función real  $h$  definida por  $h(x) = \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}$ .

- El dominio de la función  $h$ . Los límites  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ .
- La asíntota de la curva  $y = h(x)$ .
- La primitiva de la función  $h$  (es decir,  $\int h(x)dx$ ) y el área de la superficie encerrada entre las rectas  $y = 0, x = 1, x = 5$  y la curva  $y = h(x)$ .

**Solución:**

- El dominio de la función  $h$ . Los límites  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ .  
El denominador  $x^2 + 2x + 5 = 0$  no tiene raíces reales (discriminante  $4 - 20 < 0$ ). Dominio:  $\mathbb{R}$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = h(0) = -3/5$$

<b>Dominio:</b> $\mathbb{R}$ . $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$ . $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = -3/5$ .
---

- La asíntota de la curva  $y = h(x)$ .

Como el grado del numerador es uno más que el del denominador, hay una asíntota oblicua. La obtenemos por división polinómica:

$$(x^3 + x^2 + 5x - 3) \div (x^2 + 2x + 5) \text{ da cociente } (x - 1) \text{ y resto } (2x + 2).$$

La asíntota oblicua es $y = x - 1$ .
--------------------------------------

- La primitiva de la función  $h$  (es decir,  $\int h(x)dx$ ) y el área de la superficie encerrada entre las rectas  $y = 0, x = 1, x = 5$  y la curva  $y = h(x)$ .

$$h(x) = x - 1 + \frac{2x+2}{x^2+2x+5}.$$

$$\int h(x)dx = \int (x - 1)dx + \int \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 5}dx = \frac{x^2}{2} - x + \ln(x^2 + 2x + 5) + C$$

$$\text{Área: } A = \int_1^5 h(x)dx = \left[ \frac{x^2}{2} - x + \ln(x^2 + 2x + 5) \right]_1^5.$$

$$= \left( \frac{25}{2} - 5 + \ln(60) \right) - \left( \frac{1}{2} - 1 + \ln(8) \right) = 8 + \ln(60/8) = 8 + \ln(15/2)$$

<b>Primitiva:</b> $\frac{x^2}{2} - x + \ln(x^2 + 2x + 5) + C$ . <b>Área:</b> $8 + \ln(15/2)$ u <sup>2</sup> .
---



## Problema B.1. Álgebra

Se dan las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$  y  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ .

- Los valores de  $\alpha$  para los que la ecuación matricial  $AX = \alpha X$  solo admite una solución.
- Todas las soluciones de la ecuación matricial  $AX = 5X$ .
- Comprobar que  $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$  es una solución de la ecuación matricial  $AX = 2X$  y, sin calcular la matriz  $A^{100}$ , obtener el valor  $\beta$  tal que  $A^{100} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

**Solución:**

- Los valores de  $\alpha$  para los que la ecuación matricial  $AX = \alpha X$  solo admite una solución. La ecuación  $AX = \alpha X$  es  $(A - \alpha I)X = 0$ . Solo admite la solución trivial  $X = 0$  si  $\det(A - \alpha I) \neq 0$ .

$$|A - \alpha I| = \begin{vmatrix} 1 - \alpha & 4 \\ -1 & 6 - \alpha \end{vmatrix} = (1 - \alpha)(6 - \alpha) + 4 = \alpha^2 - 7\alpha + 10 = 0$$

Las raíces son  $\alpha = 2, \alpha = 5$ . Para cualquier otro valor de  $\alpha$ , la única solución es  $X = 0$ .

La ecuación solo admite una solución para  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{2, 5\}$ .

- Todas las soluciones de la ecuación matricial  $AX = 5X$ .

Es un S.C.I.  $(A - 5I)X = 0 \implies \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

$-x + y = 0 \implies x = y$ . Solución:  $(x, y) = (\lambda, \lambda), \forall \lambda \in \mathbb{R}$ .

Las soluciones son de la forma  $X = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ .

- Comprobar que  $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$  es una solución de  $AX = 2X$  y, sin calcular  $A^{100}$ , obtener  $\beta$  tal que  $A^{100} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ .  $A \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Se comprueba. Si  $AX = 2X$ , entonces  $A^k X = 2^k X$ . Para  $k = 100$ :  $A^{100} X = 2^{100} X$ . Por tanto,  $\beta = 2^{100}$ .

Se comprueba la solución. El valor es  $\beta = 2^{100}$ .



## Problema B.2. Geometría

Se dan en el espacio la recta  $r: \frac{x-\alpha}{-1} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{\beta}$  y el plano  $\pi: x + 2y + 3z = 6$ .

- La posición relativa de la recta  $r$  y el plano  $\pi$  en función de los parámetros reales  $\alpha$  y  $\beta$ .
- La distancia entre la recta  $r$  y el plano cuando  $\alpha = 6$  y  $\beta = 3$ .
- La ecuación del plano que pasa por  $(0,0,0)$  y que no corta al plano  $\pi$ .

Solución:

- La posición relativa de la recta  $r$  y el plano  $\pi$  en función de los parámetros reales  $\alpha$  y  $\beta$ .

$$\vec{v}_r = (-1, -4, \beta), \vec{n}_\pi = (1, 2, 3).$$

$$\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = -1 - 8 + 3\beta = 3\beta - 9.$$

Si  $3\beta - 9 \neq 0 \iff \beta \neq 3$ , la recta y el plano son **secantes**.

Si  $\beta = 3$ , son paralelos o la recta está contenida. Punto de  $r$ :  $P(\alpha, 0, 0)$ .

Sustituimos  $P$  en  $\pi$ :  $\alpha + 2(0) + 3(0) = 6 \implies \alpha = 6$ .

Si  $\beta \neq 3$ , secantes. Si  $\beta = 3, \alpha = 6$ ,  $r$  contenida en  $\pi$ . Si  $\beta = 3, \alpha \neq 6$ ,  $r$  paralela a  $\pi$ .

- La distancia entre la recta  $r$  y el plano cuando  $\alpha = 6$  y  $\beta = 3$ .  
Para  $\alpha = 6, \beta = 3$ , la recta está contenida en el plano. La distancia es 0.

La distancia es 0.

- La ecuación del plano que pasa por  $(0,0,0)$  y que no corta al plano  $\pi$ .  
Un plano que no corta a  $\pi$  debe ser paralelo. Tendrá la forma  $x + 2y + 3z = d$ .  
Pasa por  $(0,0,0)$ :  $0 + 0 + 0 = d \implies d = 0$ .

El plano es  $x + 2y + 3z = 0$ .

### Problema B.3. Análisis

Un proyectil está unido al punto  $(0, 2)$  por una cuerda elástica y tensa. El proyectil recorre la curva  $y = 4 - x^2$  de extremos  $(-2, 0)$  y  $(2, 0)$ .

- La función de la variable  $x$  que expresa la distancia entre un punto cualquiera  $(x, 4 - x^2)$  de la curva  $y = 4 - x^2$  y el punto  $(0, 2)$ .
- Los puntos de la curva  $y = 4 - x^2$  a mayor distancia absoluta del punto  $(0, 2)$  para  $-2 \leq x \leq 2$ .
- Los puntos de la curva  $y = 4 - x^2$  a menor distancia absoluta del punto  $(0, 2)$  para  $-2 \leq x \leq 2$ .
- El área de la superficie por la que se ha movido la cuerda elástica, es decir, el área comprendida entre las curvas  $y = 4 - x^2$  y  $y = 2 - |x|$  cuando  $-2 \leq x \leq 2$ .

Solución:

- La función de la variable  $x$  que expresa la distancia entre un punto cualquiera  $(x, 4 - x^2)$  de la curva  $y = 4 - x^2$  y el punto  $(0, 2)$ .

$$d(x) = \sqrt{(x-0)^2 + (4-x^2-2)^2} = \sqrt{x^2 + (2-x^2)^2} = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}$$

$$d(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}.$$

- Los puntos de la curva  $y = 4 - x^2$  a mayor distancia absoluta del punto  $(0, 2)$  para  $-2 \leq x \leq 2$ .

Maximizamos  $g(x) = d(x)^2 = x^4 - 3x^2 + 4$ .

$g'(x) = 4x^3 - 6x = 2x(2x^2 - 3)$ . Puntos críticos:  $x = 0, x = \pm\sqrt{3/2}$ .

Evaluamos en los extremos y puntos críticos:

$d(-2) = d(2) = \sqrt{16 - 12 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2.828$ .

$d(0) = \sqrt{4} = 2$ .  $d(\pm\sqrt{3/2}) = \sqrt{9/4 - 9/2 + 4} = \sqrt{7/4} \approx 1.87$ .

La mayor distancia se da en los extremos.

Los puntos son  $(-2, 0)$  y  $(2, 0)$ .

- Los puntos de la curva  $y = 4 - x^2$  a menor distancia absoluta del punto  $(0, 2)$  para  $-2 \leq x \leq 2$ .

La menor distancia de las calculadas es  $\sqrt{7/4}$  en  $x = \pm\sqrt{3/2}$ .

Los puntos son  $(\pm\sqrt{3/2}, 4 - 3/2) = (\pm\sqrt{3/2}, 5/2)$ .

Los puntos son  $(-\sqrt{3/2}, 5/2)$  y  $(\sqrt{3/2}, 5/2)$ .

- El área de la superficie por la que se ha movido la cuerda elástica, es decir, el área comprendida entre las curvas  $y = 4 - x^2$  y  $y = 2 - |x|$  cuando  $-2 \leq x \leq 2$ .

El área está entre  $y = 4 - x^2$  y  $y = 2 - |x|$ .

Por simetría, calculamos el área para  $x \geq 0$  y multiplicamos por 2. Para  $x \geq 0$ ,  $y = 2 - x$ .

$$A = 2 \int_0^2 ((4 - x^2) - (2 - x)) dx = 2 \int_0^2 (-x^2 + x + 2) dx$$

$$A = 2 \left[ -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^2 = 2 \left( -\frac{8}{3} + 2 + 4 \right) = 2 \left( \frac{10}{3} \right) = \frac{20}{3}$$

El área es  $20/3$  unidades cuadradas.

